V 원의 성질

세상 어디든 쉽게 이동하려면

우리가 비교적 쉽고 정확하게 그릴 수 있는 도형으로 원을 꼽을 수 있습니다. 또한 원형은 잘 휘는 나무 막대로 손쉽게 만들 수 있는 도형이기도 합니다.

옛날 사람들은 태양계 행성들의 모양을 원형으로 나타내었으며 이들이 태양을 중심으로 원운동을 한다고 믿었습니다. 그래서 오래전부터 수학자들은 원에서 찾아볼 수 있는 여러 가지 성질을 탐구했습니다.

또 원형 물체가 평지에서 잘 구른다는 사실을 이용하여 발명한 바퀴는 인류의 가장 위대한 발명품 중의 하나로 인정받고 있습니다. 바퀴의 발명으로 인해 인간은 이동 범위를 획기적으로 늘리면서 많은 양의 무거운 물건도 쉽게 운반할 수 있게 되었기 때문입니다.

한편, 원은 완벽한 대칭성을 갖고 있기 때문에 동전이나 그릇 등의 생활용품뿐만 아니라 디자인의 요소로도 많이 활용되고 있습니다.

(출처: Mankiewicz, R., 『The Story of Mathematics』)

이 단원에서는

원의 현과 접선의 성질을 이해하고, 원주각의 성질을 활용하여 여러 가지 문제를 해결하는 방법을 배웁니다.

1 원과 직선

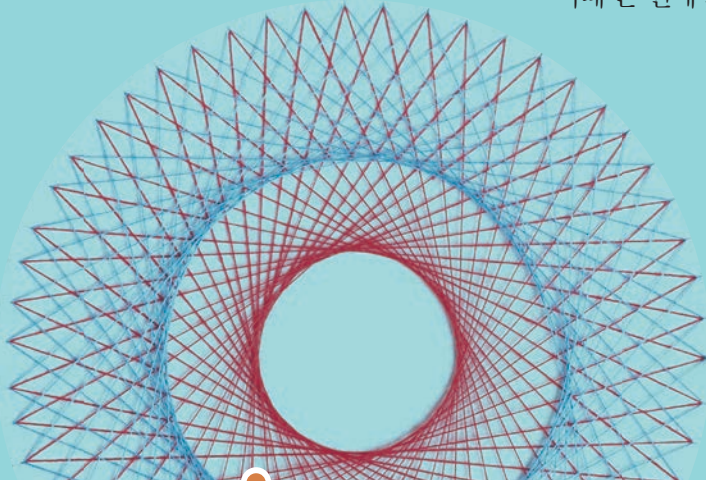
직선만을 이용하여 원이나 포물선 모양의 곡선 형태를 만들어 내는 '스트링 아트(string art)'는 영국의 수학자이자 수학교육자인 메리 불(Boole, M. E., 1832~1916)이 처음 고안했다고 합니다.

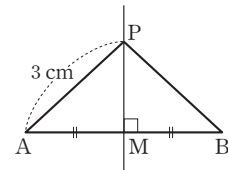
학교에서 수학을 가르치게 된 메리 불은 학생들이 곡선을 보다 쉽게 표현하고 그 특성을 시각적으로 파악할 수 있도록 하기 위해 스트링 아트를 수업에 활용했다고 합니다.

▲ 메리 불

그렇다면 직선으로 원을 어떻게 만들 수 있을까요? 다음 그림과 같이 큰 원 안에 일정한 길이의 현을 계속 그으면 그 내부에 작은 원 모양의 형태가 나타납니다. 이때 큰 원에 그은 현들이 작은 원의 접선이 된답니다.

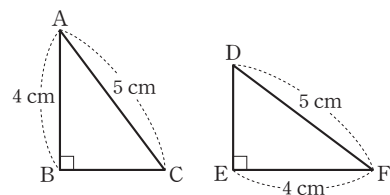
(출처: Michalowicz, K. D., 『Vita Mathematica』 / http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk, 2019)

이 단원에서는 원과 현, 원과 접선 사이의 관계에 대하여 알아봅니다.

• 수직이등분선

1 오른쪽 그림에서 직선 PM은 선분 AB의 수직이등분선이고 $\overline{PA}=3$ cm일 때, $\overline{PB}$의 길이를 구하시오.

• 직각삼각형의 합동 조건

2 오른쪽 두 직각삼각형이 서로 합동임을 기호 ≡를 사용하여 나타내고, 이때 사용한 합동 조건을 말하시오.

원의 현

학습 목표 • 원의 현에 대한 성질을 이해한다.

원의 중심과 현의 수직이등분선 사이에는 어떤 관계가 있는가?

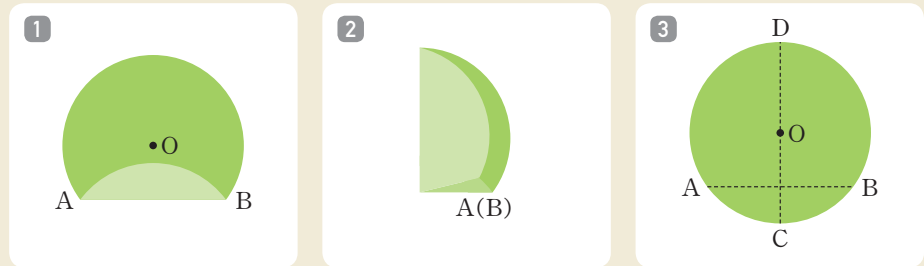
활동지 285쪽

생각 열기

다음 순서에 따라 원 모양의 종이를 접어 보자.

1 원 모양의 종이를 접어 현 AB를 만든다.

2 두 점 A와 B가 포개지도록 접는다.

3 종이를 펼쳐 2에서 접힌 선의 양 끝 점을 각각 C와 D라고 한다.

1. 현 CD가 현 AB의 수직이등분선임을 설명해 보자.

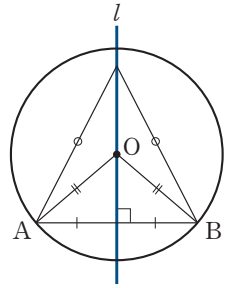
2. 현 CD가 원의 중심 O를 지나는지 확인해 보자.

위의 생각 열기로부터 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지남을 알 수 있다.

이 성질이 항상 성립함을 확인해 보자.

▸ 두 점 A와 B로부터 같은 거리에 있는 점은 선분 AB의 수직이등분선 위에 있다.

오른쪽 그림과 같이 원 O에서 현 AB의 수직이등분선을 l이라고 하면, 두 점 A와 B로부터 같은 거리에 있는 점들은 모두 직선 l 위에 있다. 따라서 두 점 A와 B로부터 같은 거리에 있는 원의 중심 O도 직선 l 위에 있다.

즉, 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

이제 원의 중심에서 현에 내린 수선이 그 현을 이등분하는지 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라고 하면, △OAM과 △OBM에서

$\angle OMA = \angle OMB = 90°$,

$\overline{OA} = \overline{OB}$ (반지름),

$\overline{OM}$은 공통

이므로 △OAM≡△OBM이다. 따라서

$\overline{AM} = \overline{BM}$

이다.

즉, 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

배웠어요!

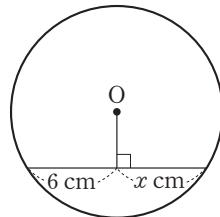
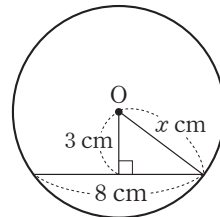
빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 서로 합동이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

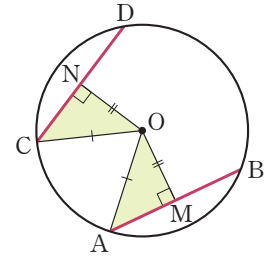
원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계

❶ 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.
❷ 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

문제 1 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

원의 중심에서 현까지의 거리는 현의 길이와 어떤 관계가 있는가?

다음을 통하여 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이 사이의 관계를 알아보자.

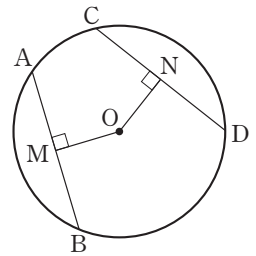
오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB와 CD에 내린 수선의 발을 각각 M과 N이라고 하자. 이때 $\overline{OM}=\overline{ON}$이면 $\overline{AB}=\overline{CD}$임을 설명하려고 한다.

1 △OAM≡△OCN임을 설명해 보자.

2 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

① $\overline{AB}=\square\times\overline{AM}$　　② $\overline{CD}=\square\times\overline{CN}$

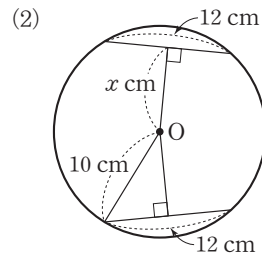
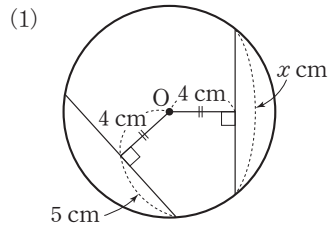
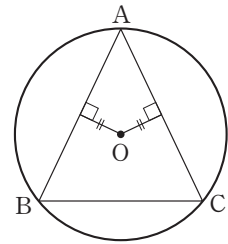
3 **1**과 **2**를 이용하여 $\overline{AB}=\overline{CD}$임을 설명해 보자.

위의 함께하기에서 알 수 있듯이 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.

문제 2 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB와 CD에 내린 수선의 발을 각각 M과 N이라고 하자. 이때 $\overline{AB}=\overline{CD}$이면 $\overline{OM}=\overline{ON}$임을 설명하시오.

이상을 정리하면 다음과 같다.

원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이의 관계

❶ 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.
❷ 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

문제 3 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

문제 4 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB와 AC에 이르는 거리가 같을 때, $\angle ABC = \angle ACB$임을 설명하시오.

오른쪽 그림은 원형 접시가 세 조각으로 깨진 것이다. 세 학생이 원의 중심을 찾아 깨지기 전의 접시 모양을 그리려고 한다.

▶ 위의 세 학생 중에서 옳게 말한 사람을 찾고, 원의 중심을 찾는 방법을 설명해 보자.

원의 접선

학습 목표 • 원의 접선에 대한 성질을 이해한다.

다가서기

원의 접선은 어떤 성질을 갖는가?

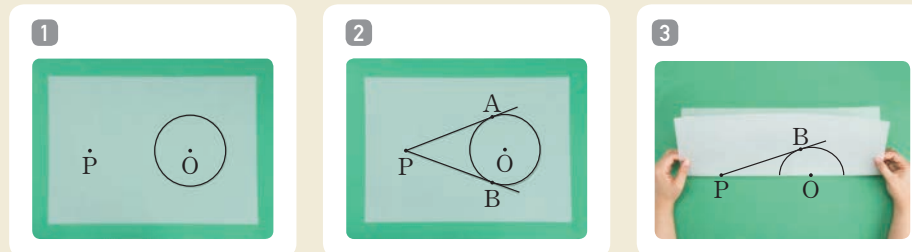
활동지 287쪽

생각 열기

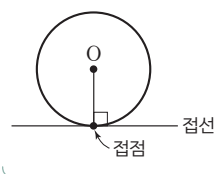
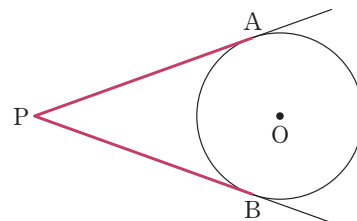
다음 순서에 따라 투명 종이를 접어 보자.

1 투명 종이에 원 O를 그리고, 원 밖에 한 점 P를 잡는다.

2 점 P에서 원 O에 접선을 그은 후, 접점을 각각 A와 B라고 한다.

3 직선 OP를 접는 선으로 하여 투명 종이를 접는다.

▶ 두 선분 PA와 PB가 포개지는지 확인해 보자.

배웠어요!

원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 수직이다.

원 O 밖의 한 점 P에서 이 원에 그을 수 있는 접선은 2개이다. 두 접선의 접점을 각각 A와 B라고 할 때, $\overline{PA}$ 또는 $\overline{PB}$의 길이를 점 P에서 원 O에 그은 '접선의 길이'라고 한다.

위의 생각 열기에서 $\overline{PA}=\overline{PB}$임을 알 수 있다. 이제 이 성질이 항상 성립함을 확인해 보자.

오른쪽 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 P에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A와 B라고 할 때, $\triangle$PAO와 $\triangle$PBO에서

$$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ,$$

$\overline{OP}$는 공통,

$\overline{OA} = \overline{OB}$ (반지름)

이므로 $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$이다. 따라서

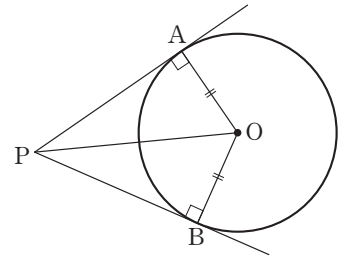
$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

이다.

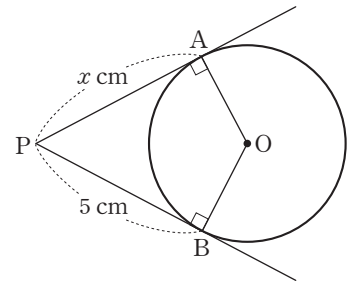
즉, 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

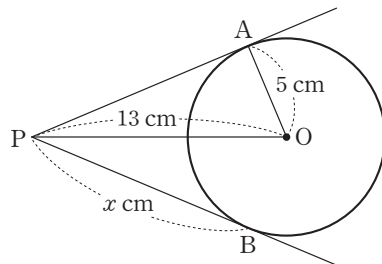
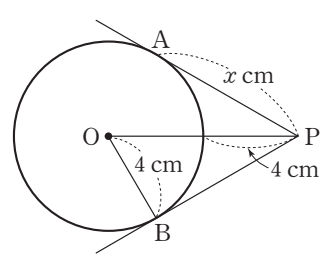
이상을 정리하면 다음과 같다.

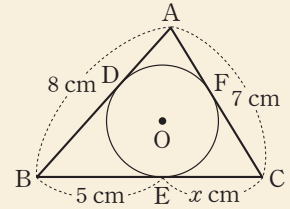
접선의 길이

원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

보기 오른쪽 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 P에서 이 원에 그은 두 접선의 길이 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$는 같으므로

$$\overline{PA} = \overline{PB} = 5\text{ cm}$$

이다. 따라서 $x=5$이다.

문제 1 다음 그림에서 두 점 A와 B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때, x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

예제 1

오른쪽 그림에서 원 O는 △ABC의 내접원이고 세 점 D, E, F는 접점이다. $\overline{AB}=8$ cm, $\overline{BE}=5$ cm, $\overline{AC}=7$ cm일 때, x의 값을 구하시오.

풀이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$가 원 O의 접선이므로

$\overline{BD}=\overline{BE}=5$ cm

$\overline{AD}=\overline{AB}-\overline{BD}=8-5=3$ (cm)이므로

$\overline{AF}=\overline{AD}=3$ cm

또 $\overline{CF}=\overline{CE}=x$ cm이고 $\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CF}$이므로

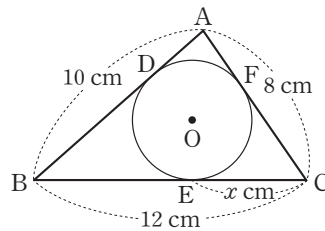
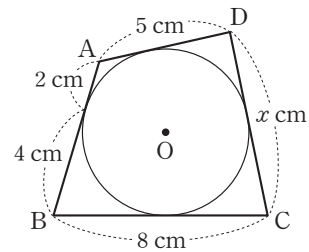
$3+x=7$

따라서 $x=4$

 4

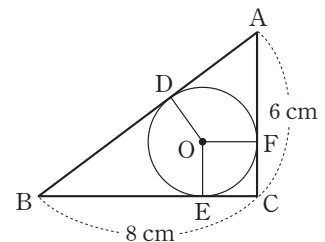
문제 2 다음 그림에서 △ABC와 □ABCD가 각각 원 O에 외접할 때, x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

생각이 크는 수학

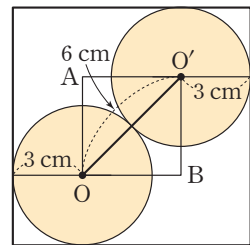
오른쪽 그림에서 △ABC는 ∠C=90°, $\overline{BC}=8$ cm, $\overline{AC}=6$ cm인 직각삼각형이고 원 O는 △ABC의 내접원이다.

1 접점을 각각 D, E, F라고 할 때, □OECF는 정사각형임을 설명해 보자.

2 원 O의 반지름의 길이를 구해 보자.

상자 채우기

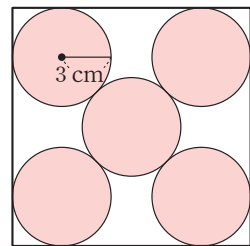
지금은 유리병을 칸막이가 있는 상자에 담아 배달하지만, 그 전에는 유리병에 담은 우유를 안전하게 배달하기 위하여 유리병이 꼭 맞게 들어가는 밑면이 정사각형 모양인 상자를 어떻게 만들지 고심하였다.

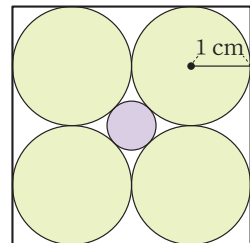
여기서는 우리가 해결할 수 있는 간단한 경우에 대하여 알아보기로 한다.

오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3 cm인 원기둥 모양의 유리병 2개가 꼭 맞게 들어가도록 밑면이 정사각형 모양인 상자를 만들려고 할 때, 이 상자의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이는 다음과 같이 구할 수 있다.

두 유리병의 밑면인 원의 중심을 각각 O와 O′이라 하고, 각 변이 상자의 테두리와 평행하도록 정사각형 AOBO′을 그리면 대각선 OO′의 길이가 6 cm이므로

$$\overline{OB}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}\,(cm)$$

따라서 이 상자의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이는 $(6+3\sqrt{2})$ cm이다.

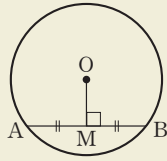
탐구 1 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3 cm인 원기둥 모양의 유리병 5개가 꼭 맞게 들어가도록 밑면이 정사각형 모양인 상자를 만들려고 할 때, 이 상자의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이를 구해 보자.

탐구 2 오른쪽 그림과 같이 정사각형 안에 반지름의 길이가 1 cm인 원 4개와 작은 원 1개가 꼭 맞게 들어 있다. 작은 원의 반지름의 길이를 구해 보자.

스스로 확인하는 문제

1 원의 현

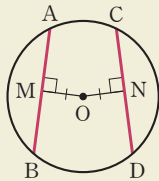
(1) 원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계

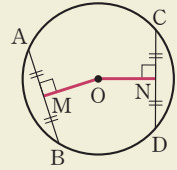
① 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

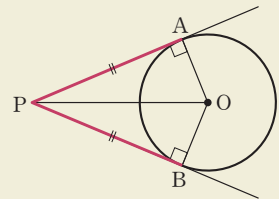
② 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

즉, $\overline{AB} \perp \overline{OM}$이면 $\overline{AM} = \overline{BM}$

(2) 원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이의 관계

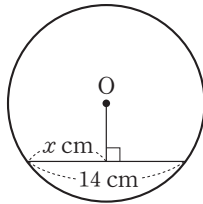
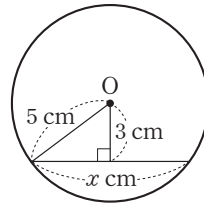
① 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.

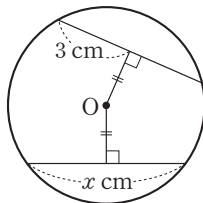
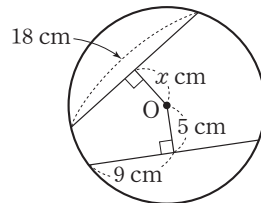
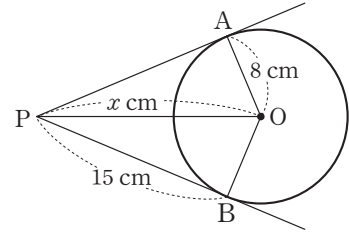
즉, $\overline{OM} = \overline{ON}$이면 $\overline{AB} = \overline{CD}$

② 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

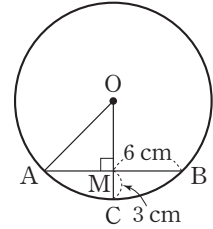
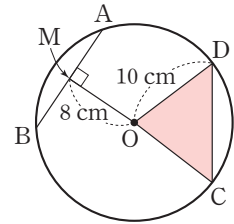
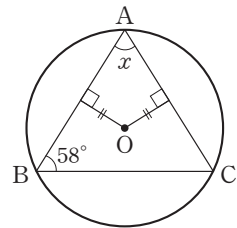
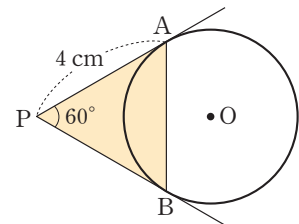
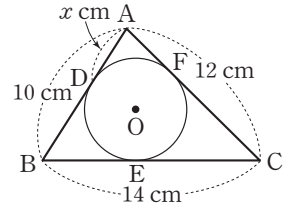
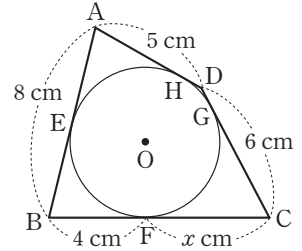
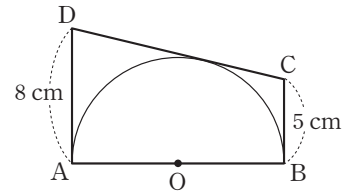
즉, $\overline{AB} = \overline{CD}$이면 $\overline{OM} = \overline{ON}$

2 원의 접선

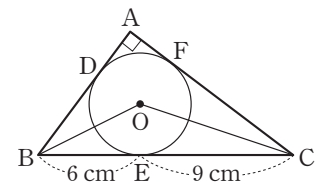
원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다. 즉, $\overline{PA} = \overline{PB}$

기본 문제

01 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

02 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

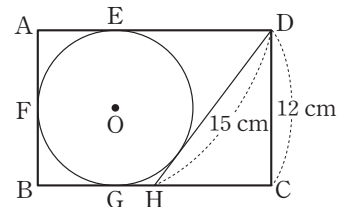
(1)

(2)

03 오른쪽 그림에서 두 점 A와 B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때, x의 값을 구하시오.

표준 문제

04 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}\perp\overline{OC}$이고 $\overline{BM}=6$ cm, $\overline{CM}=3$ cm일 때, $\overline{OA}$의 길이를 구하시오.

05 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}\perp\overline{OM}$이고 $\overline{AB}=\overline{CD}$이다. $\overline{OD}=10$ cm, $\overline{OM}=8$ cm일 때, $\triangle$OCD의 넓이를 구하시오.

06 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB와 AC에 이르는 거리가 같고 $\angle B=58°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

07 오른쪽 그림에서 두 점 A와 B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다. $\overline{PA}=4$ cm, $\angle APB=60°$일 때, $\triangle$APB의 넓이를 구하시오.

08 오른쪽 그림에서 원 O는 $\triangle ABC$의 내접원이고 세 점 D, E, F는 접점이다. $\overline{AB}=10$ cm, $\overline{BC}=14$ cm, $\overline{CA}=12$ cm일 때, x의 값을 구하시오.

09 오른쪽 그림에서 □ABCD가 원 O에 외접하고 네 점 E, F, G, H는 접점이다. $\overline{AB}=8$ cm, $\overline{BF}=4$ cm, $\overline{CD}=6$ cm, $\overline{AD}=5$ cm일 때, x의 값을 구하시오.

10 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$는 원 O의 지름이고 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$는 원 O의 접선이다. $\overline{AD}=8$ cm, $\overline{BC}=5$ cm일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하시오.

발전 문제

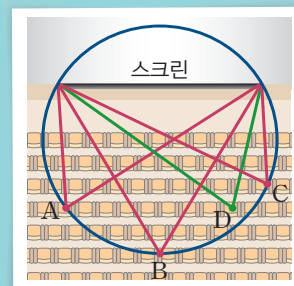
11 오른쪽 그림에서 원 O는 $\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC의 내접원이고, 세 점 D, E, F는 접점이다. $\overline{BE}=6$ cm, $\overline{CE}=9$ cm일 때, 다음에 답하시오.

(1) 원 O의 반지름의 길이를 구하시오.

(2) $\triangle OBC$의 둘레의 길이를 구하시오.

12 문제 해결

오른쪽 그림에서 원 O는 직사각형 ABCD의 세 변과 접하고, 세 점 E, F, G는 접점이다. 또 $\overline{DH}$는 원 O의 접선이고 $\overline{CD}=12$ cm, $\overline{DH}=15$ cm일 때, $\overline{BH}$의 길이를 구하시오.

2 원주각

TV나 영화관 화면의 좌우 끝 사이를 정상적으로 바라볼 수 있는 각을 '시야각(視野角, viewing angle)'이라고 합니다.

오른쪽 그림과 같은 영화관에서 A 좌석과 평면 화면을 바라보는 시야각의 크기가 같은 곳은, 점 A와 스크린의 양 끝 점을 지나는 원 위에 있는 좌석인 B 또는 C임이 알려져 있습니다. 얼핏 생각하기에는 A 좌석에서 화면과 평행한 위치에 있는 좌석인 D에서의 시야각이 모두 같을 것 같지만, 사실은 원의 안쪽 좌석에서는 시야각이 더 크고 바깥쪽 좌석에서는 시야각이 더 작습니다.

그래서 일직선으로 앉아 있는 사람들의 몰입감을 높이기 위하여 시야각이 같도록 화면을 원형으로 구부린 것이 곡면 화면입니다. 곡면 화면은 영화관, TV 등의 디스플레이 화면이나 조명등 등에 이용된다고 합니다.

이와 같이 곡면 화면의 원리에서 원주각의 성질을 찾아볼 수 있습니다.

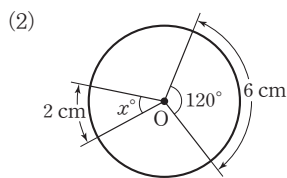
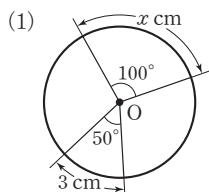
(출처: 한국정보통신기술협회, 2018)

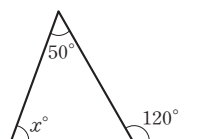
이 단원에서는 원과 각, 원과 접선에 관련된 여러 가지 성질을 알아봅니다.

• 부채꼴의 중심각과 호의 길이

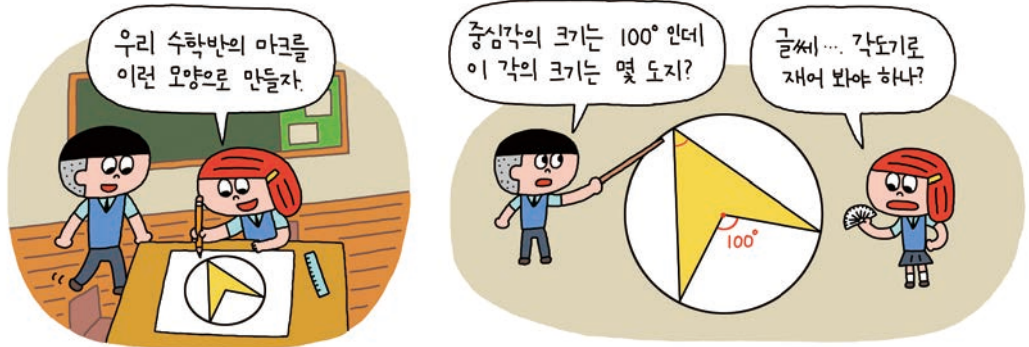
1 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

• 삼각형의 내각과 외각의 크기

2 오른쪽 그림에서 x의 값을 구하시오.

원주각의 성질

학습 목표 • 원주각의 성질을 이해한다.

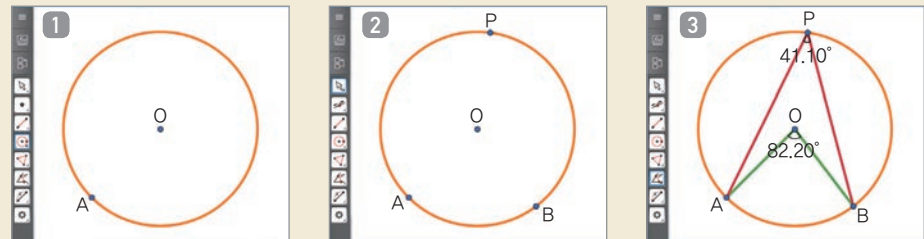
다가서기

원주각과 중심각 사이에는 어떤 관계가 있는가?

생각 열기

알지오매스를 이용하여 다음과 같이 활동해 보자.

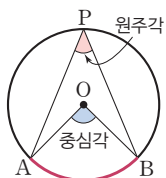
1 원: 중심과 한 점을 이용하여 중심이 O이고 한 점 A를 지나는 원을 그린다.

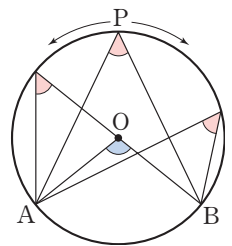
2 대상 위의 점을 이용하여 원 O 위에 두 점 B와 P를 각각 잡는다.

3 선분을 이용하여 두 선분 OA와 OB를 각각 긋고, 각도를 이용하여 ∠AOB의 크기를 측정한다. 같은 방법으로 ∠APB의 크기를 측정한다.

1. 점 P를 움직이면서 ∠APB의 크기가 어떻게 변하는지 관찰해 보자.

2. ∠AOB와 ∠APB의 크기 사이에 어떤 관계가 있는지 말해 보자.

배웠어요!

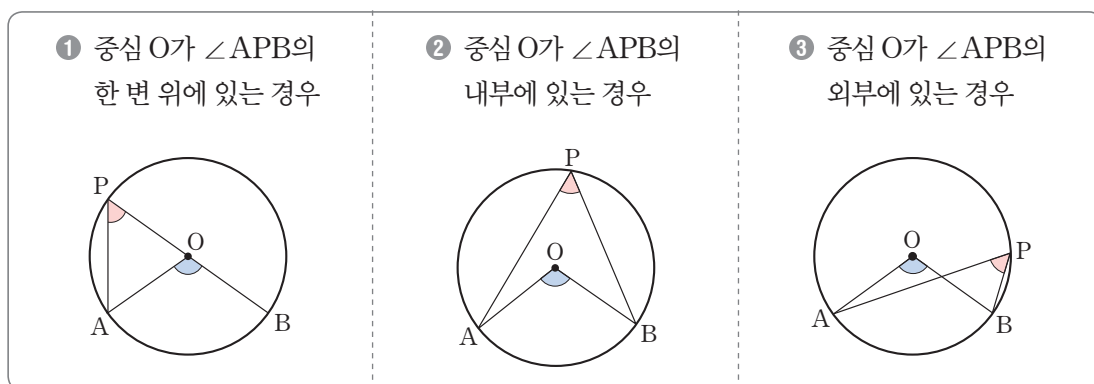
$\overset{\frown}{AB}$는 호 AB를 나타낸다.

원 O에서 $\overset{\frown}{AB}$ 위에 있지 않은 원 위의 점 P에 대하여 ∠APB를 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 **원주각**이라 하고, $\overset{\frown}{AB}$를 '원주각 ∠APB에 대한 호'라고 한다.

원 O에서 $\overset{\frown}{AB}$가 정해지면 그 호에 대한 중심각 ∠AOB는 하나로 정해지지만, 원주각 ∠APB는 점 P의 위치에 따라 무수히 많다.

앞의 생각 열기에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

이제 이 성질이 항상 성립함을 확인해 보자.

원 O에서 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각 $\angle APB$와 원의 중심 O의 위치 관계는 점 P의 위치에 따라 다음 세 가지 경우가 있다.

❶ 중심 O가 $\angle APB$의 한 변 위에 있는 경우

❷ 중심 O가 $\angle APB$의 내부에 있는 경우

❸ 중심 O가 $\angle APB$의 외부에 있는 경우

❶ 중심 O가 $\angle APB$의 한 변 위에 있는 경우

$\triangle OAP$는 $\overline{OP}=\overline{OA}$인 이등변삼각형이므로

$$\angle OPA=\angle OAP$$

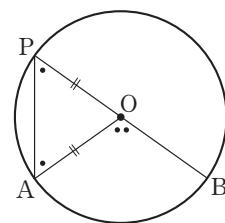
이다. 이때 $\angle AOB$는 $\triangle OAP$의 한 외각이므로

$$\angle AOB=\angle OPA+\angle OAP=2\angle APB$$

▸ $\angle OPA$와 $\angle APB$는 같은 각이다.

이다. 따라서

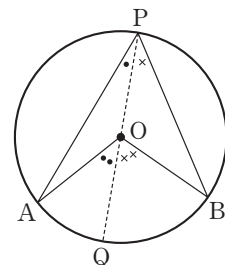
$$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$$

이다.

❷ 중심 O가 $\angle APB$의 내부에 있는 경우

오른쪽 그림과 같이 지름 PQ를 그으면 ❶에 의하여

$$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ,\ \angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\angle APB&=\angle APQ+\angle BPQ\\&=\frac{1}{2}(\angle AOQ+\angle BOQ)\\&=\frac{1}{2}\angle AOB\end{aligned}$$

❸ 중심 O가 $\angle APB$의 외부에 있는 경우

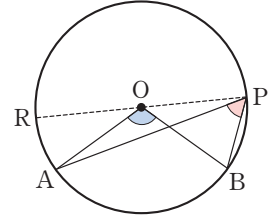
다음은 원의 중심 O가 $\angle APB$의 외부에 있는 경우에 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$임을 설명하는 과정이다.

▶ □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

오른쪽 그림과 같이 지름 PR를 그으면 ❶에 의하여 다음이 성립한다.

$$\angle APB = \angle RPB - \square$$

$$= \frac{1}{2}(\angle ROB - \square)$$

$$= \frac{1}{2}\angle AOB$$

위의 함께하기에서 원의 중심 O가 $\angle APB$의 외부에 있는 경우에도 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$임을 알 수 있다.

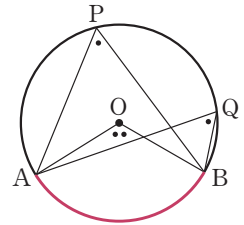
이상을 정리하면 다음과 같다.

원주각과 중심각 사이의 관계

❶ 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다. 즉,

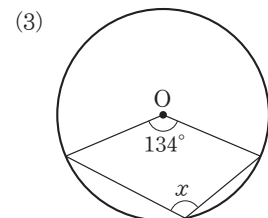
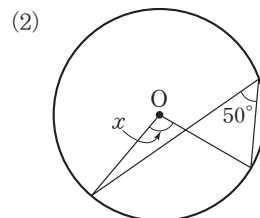
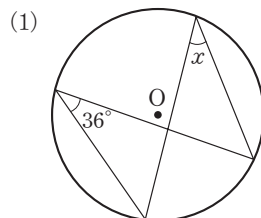
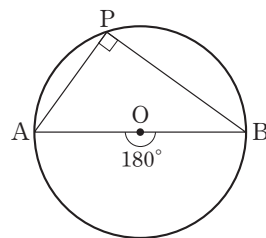
$$\angle APB = \angle AQB$$

❷ 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다. 즉,

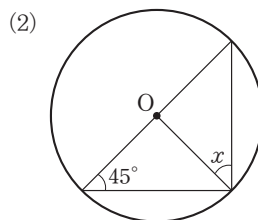
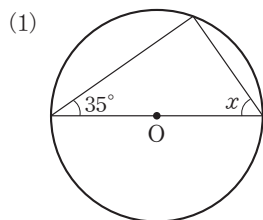
$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

문제 1 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)

(2)

(3)

원 O에서 $\overset{\frown}{AB}$가 반원일 때 중심각 ∠AOB의 크기는 180°이므로, 반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 알 수 있다. 또 원 O에서 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각의 크기가 90°이면 $\overset{\frown}{AB}$는 반원이다.

문제 2 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)

(2)

이제 원주각과 중심각 사이의 관계를 이용하여 원에 내접하는 사각형의 성질을 알아보자.

예제 1 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°임을 설명하시오.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 □ABCD에서 호 BCD와 호 BAD에 대한 중심각을 각각 $\angle a$와 $\angle b$라고 하면

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle a,\ \angle C=\frac{1}{2}\angle b$$

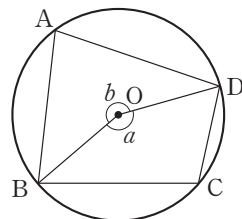
그러므로

$$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\angle a+\angle b)=180^\circ$$

같은 방법으로 $\angle B+\angle D=180^\circ$

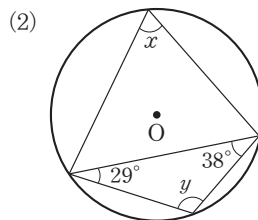
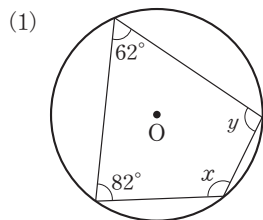
따라서 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

답 풀이 참조

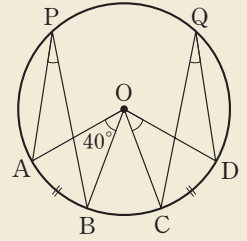
생각 톡톡

원에 내접하는 평행사변형은 어떤 사각형일까?

문제 3 다음 그림에서 $\angle x$와 $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

(1)

(2)

원주각의 크기와 호의 길이 사이에는 어떤 관계가 있는가?

오른쪽 그림에서 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$이고 $\angle AOB=40°$이다.

1. $\angle COD$의 크기를 구해 보자.
2. $\angle APB$와 $\angle CQD$의 크기를 각각 구하여 비교해 보자.

배웠어요!

한 원에서 길이가 같은 호에 대한 중심각의 크기는 같다. 또 크기가 같은 중심각에 대한 호의 길이는 같다.

위의 생각 열기에서 $\angle COD=\angle AOB=40°$이고,

$$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=20°,\ \angle CQD=\frac{1}{2}\angle COD=20°$$

이다. 따라서

$$\angle APB=\angle CQD$$

임을 알 수 있다.

이와 같이 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

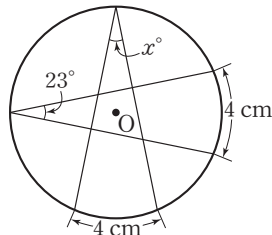
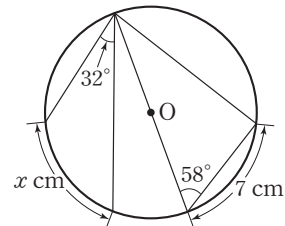
또 한 원에서 원주각의 크기가 같은 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배로 같다. 그런데 크기가 같은 중심각에 대한 호의 길이는 같으므로, 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이도 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

원주각의 크기와 호의 길이 사이의 관계

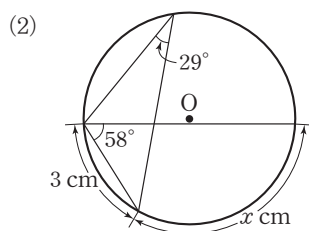
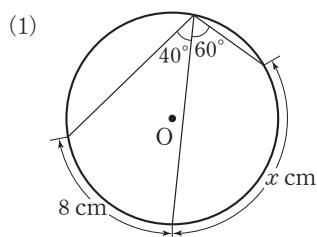
1. 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.
2. 한 원에서 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다.

문제 4 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 중심각의 크기에 정비례하므로 그 호에 대한 원주각의 크기에도 정비례한다.

문제 5 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

(2)

생각이 크는 수학

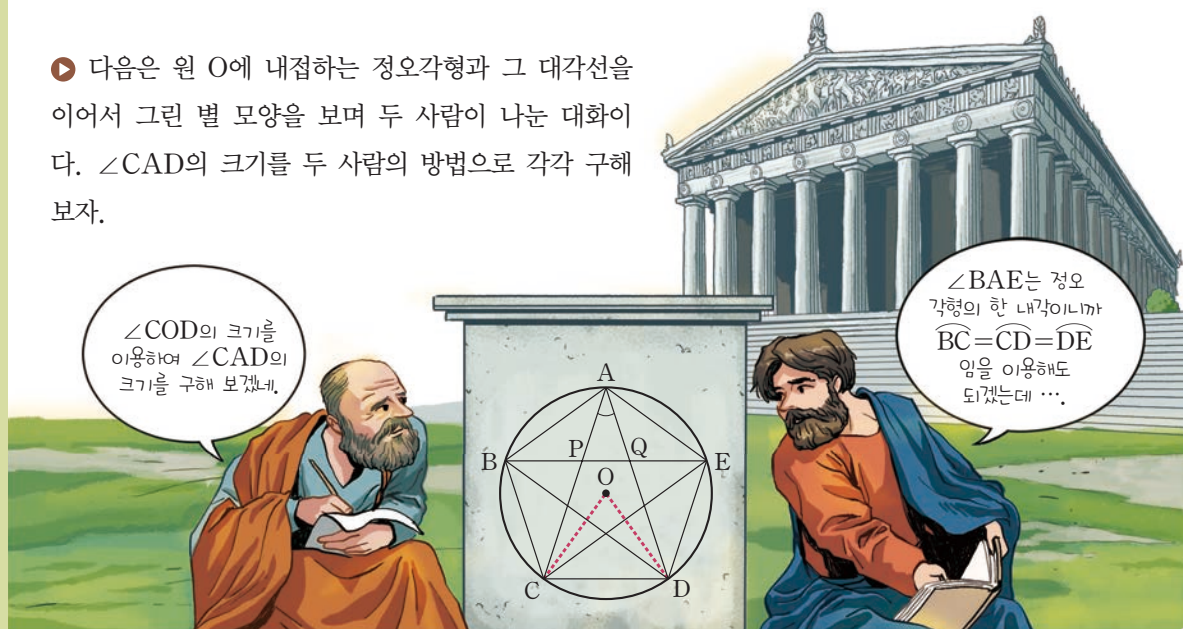
문제 해결 창의・융합

고대 그리스의 수학자인 피타고라스(Pythagoras, B.C. 569?~B.C. 475?)와 그의 철학을 계승하려는 제자들로 구성된 피타고라스학파는 정오각형의 대각선을 이어서 그린 별 모양을 그들의 상징으로 정했다고 한다.

▶ 다음은 원 O에 내접하는 정오각형과 그 대각선을 이어서 그린 별 모양을 보며 두 사람이 나눈 대화이다. $\angle CAD$의 크기를 두 사람의 방법으로 각각 구해 보자.

∠COD의 크기를 이용하여 ∠CAD의 크기를 구해 보겠네.

A B C D E P Q O

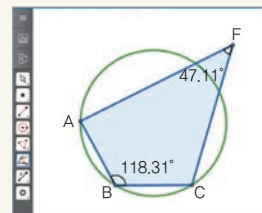
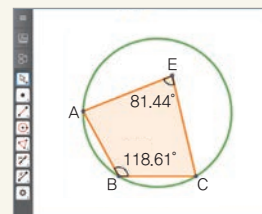
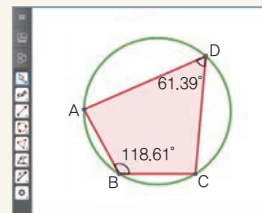
∠BAE는 정오각형의 한 내각이니까 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$임을 이용해도 되겠는데 ⋯.

사각형이 원에 내접할 조건

186쪽의 예제 1로부터 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°임을 알았다. 이제 알지오매스를 이용하여 사각형이 원에 내접할 조건을 확인해 보자.

❶ **원: 세 점**을 이용하여 세 점 A, B, C를 지나는 원을 그린다.

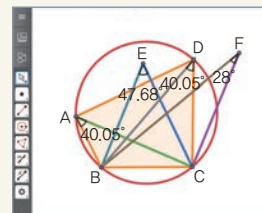
❷ **대상 위의 점**을 이용하여 원 위의 한 점 D를 잡고, **다각형**을 이용하여 원에 내접하는 사각형 ABCD를 그린다.
이때 **각도**를 이용하여 $\angle ABC$의 크기를 측정한다.
같은 방법으로 $\angle ADC$의 크기를 측정하여 $\angle ABC + \angle ADC = 180°$임을 확인한다.

❸ **점**을 이용하여 ❶에서 그린 원의 내부에 한 점 E를 잡고, ❷와 같은 방법으로 $\angle AEC$의 크기를 측정하여 $\angle ABC + \angle AEC$의 값을 구한다.

❹ **점**을 이용하여 ❶에서 그린 원의 외부에 한 점 F를 잡고, ❷와 같은 방법으로 $\angle AFC$의 크기를 측정하여 $\angle ABC + \angle AFC$의 값을 구한다.

탐구 1 위의 활동을 통해 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°인 사각형은 원에 내접함을 설명해 보자.

탐구 2 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C를 지나는 원 위의 한 점을 D, 원의 내부의 한 점을 E, 원의 외부의 한 점을 F라고 하자.

(1) $\angle BDC$, $\angle BEC$, $\angle BFC$ 중에서 $\angle BAC$와 크기가 같은 각을 찾아보자.

(2) (1)을 이용하여 $\angle BAC = \angle BXC$인 점 X를 꼭짓점으로 갖는 사각형 ABCX는 원에 내접함을 설명해 보자.

원의 접선과 현이 이루는 각

학습 목표 • 원의 접선과 원주각의 성질을 이해한다.

다가서기

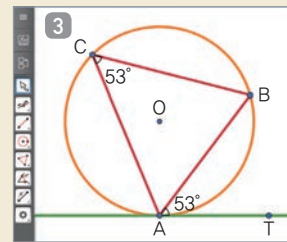
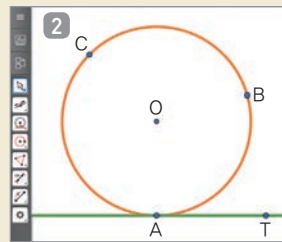
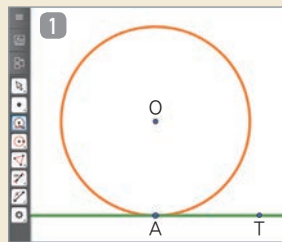
원의 접선과 현이 이루는 각은 어떤 성질을 갖는가?

생각 열기

알지오매스를 이용하여 다음과 같이 활동해 보자.

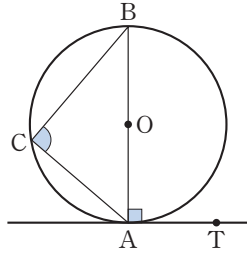
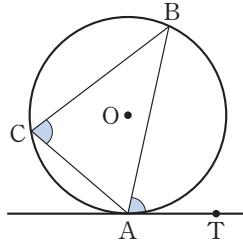
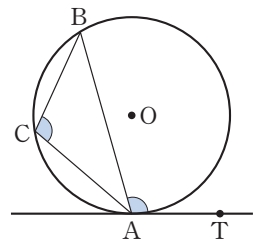
1 원: 중심과 한 점을 이용하여 중심이 O이고 한 점 A를 지나는 원을 그린 다음, 접선을 이용하여 점 A를 지나는 원 O의 접선을 그리고 그 접선 위의 한 점 T를 잡는다.

2 대상 위의 점을 이용하여 원 O 위에 두 점 B와 C를 각각 잡는다.

3 선분을 이용하여 선분 AB를 긋고, 각도를 이용하여 $\angle$BAT의 크기를 측정한다. 같은 방법으로 $\angle$BCA의 크기를 측정한다.

▶ 점 B를 움직이면서 $\angle$BAT와 $\angle$BCA의 크기 사이에 어떤 관계가 있는지 말해 보자.

위의 생각 열기에서 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각 $\angle$BAT의 크기와 호 AB에 대한 원주각 $\angle$BCA의 크기가 같음을 알 수 있다.

이제 이 성질이 항상 성립함을 확인해 보자.

원 O 위의 점 A를 지나는 접선 AT와 현 AB가 이루는 각인 $\angle$BAT는 그 크기에 따라 다음 세 가지 경우가 있다.

❶ $\angle$BAT가 직각인 경우

❷ $\angle$BAT가 예각인 경우

❸ $\angle$BAT가 둔각인 경우

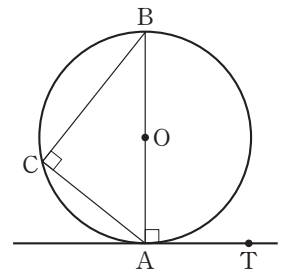
❶ $\angle$BAT가 직각인 경우

$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로 $\angle$BCA는 반원에 대한 원주각이다. 즉,

$$\angle BCA=90^{\circ}$$

이다. 따라서

$$\angle BAT=\angle BCA$$

이다.

❷ $\angle$BAT가 예각인 경우

오른쪽 그림과 같이 지름 AD와 선분 CD를 그으면

$$\angle DAT=\angle DCA=90^{\circ}$$

이므로

$$\angle BAT=90^{\circ}-\angle BAD,$$

$$\angle BCA=90^{\circ}-\angle BCD$$

이다.

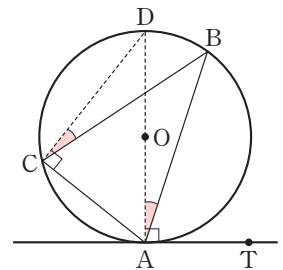
그런데 $\angle$BAD와 $\angle$BCD는 모두 $\overparen{BD}$에 대한 원주각이므로

▶ 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

$$\angle BAD=\angle BCD$$

이다. 따라서

$$\angle BAT=\angle BCA$$

이다.

❸ ∠BAT가 둔각인 경우

원 O 위의 점 A를 지나는 접선 AT와 현 AB가 이루는 각인 ∠BAT가 둔각인 경우에 ∠BAT=∠BCA임을 설명하려고 한다.

1 오른쪽 그림과 같이 지름 AD와 선분 CD를 그을 때, □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

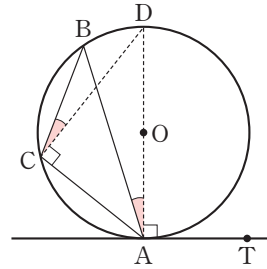
① ∠BAT=□°+∠BAD

② ∠BCA =□°+∠BCD

2 ∠BAD=∠BCD임을 설명해 보자.

....

3 ∠BAT=∠BCA임을 설명해 보자.

....

위의 함께하기에서 ∠BAT가 둔각인 경우에도 ∠BAT=∠BCA임을 알 수 있다.

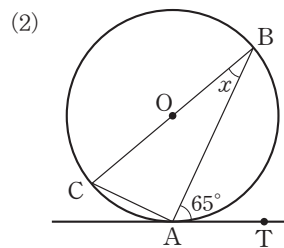
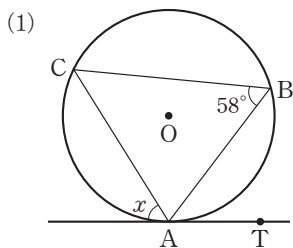
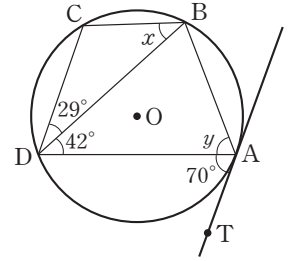
이상을 정리하면 다음과 같다.

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉,

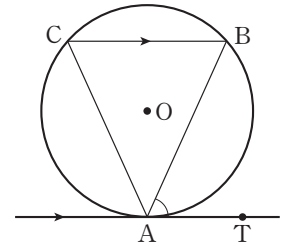
∠BAT=∠BCA

문제 1 다음 그림에서 직선 AT가 원 O의 접선이고 점 A가 접점일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)

(2)

문제 2 오른쪽 그림에서 직선 AT가 원 O의 접선이고 점 A가 접점일 때, $\angle x$와 $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

문제 3 오른쪽 그림과 같이 원 O 위의 점 A를 지나는 접선 AT와 평행한 현 BC가 있다.

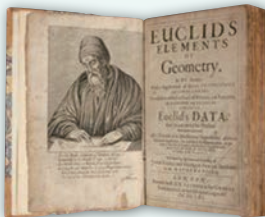
(1) $\triangle$ABC는 이등변삼각형임을 설명하시오.

(2) $\angle$BAT의 크기가 몇 도일 때 $\triangle$ABC가 정삼각형이 되는지 말하시오.

원의 현과 원주각의 성질은 언제부터 연구되었을까?

고대 그리스의 철학자이자 수학자인 탈레스(Thales, B.C. 624?~B.C. 546?)는 원의 현과 원주각에 대하여 다음 두 가지 사실을 밝혔다고 한다.

1. 원은 지름에 의하여 이등분된다.
2. 원에서 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

탈레스 ▶

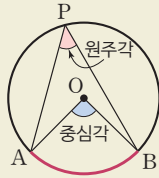
한편, 우리가 배운 원의 현과 원주각, 그리고 원의 접선에 대한 많은 내용들이 유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)가 쓴 『원론』에 있는데, 이를테면 다음 성질은 이 책의 제3권에 수록되어 있다.

▲『원론』

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

(출처: Burton, D. M., 『The History of Mathematics: An Introduction』/ Fitzpatrick, R., 『Euclid's Elements of Geometry』)

스스로 확인하는 문제

1 원주각의 성질

(1) **원주각:** 원 O에서 $\overset{\frown}{AB}$ 위에 있지 않은 원 위의 점 P에 대하여 $\angle APB$를 $\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각이라고 한다.

(2) **원주각과 중심각 사이의 관계**

① 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

② 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

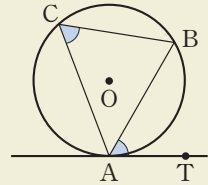
(3) **원주각의 크기와 호의 길이 사이의 관계**

① 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

② 한 원에서 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다.

2 원의 접선과 현이 이루는 각

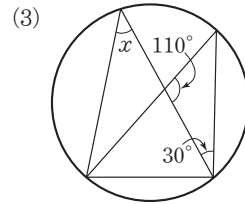
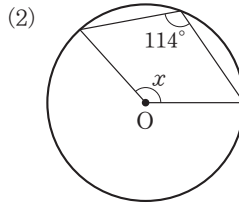
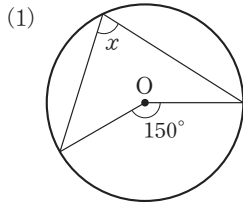
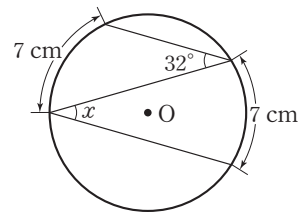
원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉,

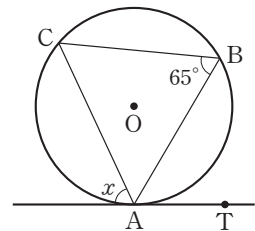
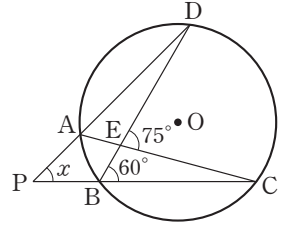
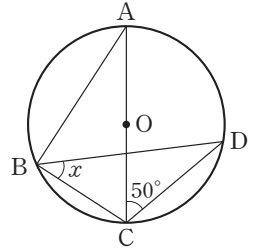
$\angle BAT = \angle BCA$

기본 문제

01 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

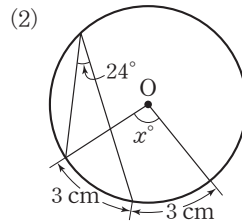
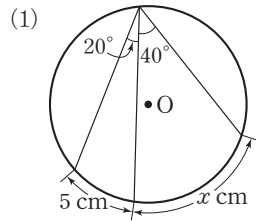
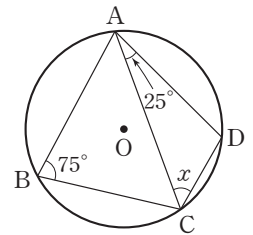
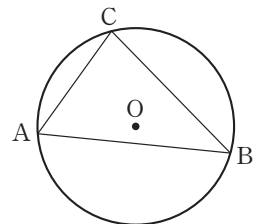
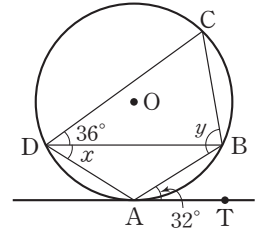
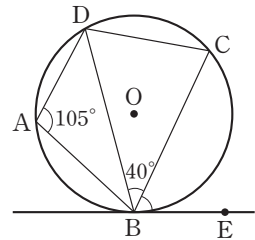
(1)

(2)

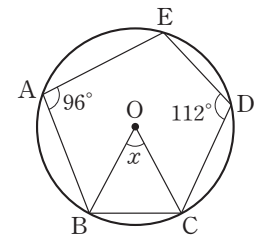
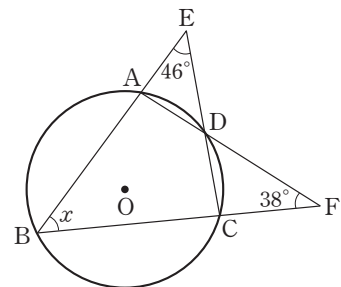
(3)

02 오른쪽 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

03 오른쪽 그림에서 직선 AT가 원 O의 접선이고 점 A가 접점일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

표준 문제

04 오른쪽 그림과 같이 원 O의 두 현 AC와 BD의 교점을 E라 하고, 두 현 AD와 BC의 연장선의 교점을 P라고 하자. $\angle DBC=60°$, $\angle DEC=75°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

05 오른쪽 그림에서 $\overline{AC}$는 원 O의 지름이고 $\angle ACD=50°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

06 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)

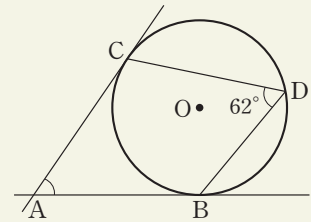
(2)

07 오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\angle ABC=75°$, $\angle CAD=25°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

08 오른쪽 그림에서 $\widehat{AB}=2\widehat{CA}$이고 $2\widehat{BC}=3\widehat{CA}$일 때, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 크기를 각각 구하시오.

09 오른쪽 그림에서 직선 AT가 원 O의 접선이고 점 A가 접점일 때, $\angle x$와 $\angle y$의 크기를 각각 구하시오.

10 오른쪽 그림에서 직선 BE는 원 O의 접선이고, 점 B는 접점이다. $\angle DAB=105°$, $\angle DBC=40°$일 때, $\angle CBE$의 크기를 구하시오.

발전 문제

11 오른쪽 그림과 같이 원 O에 내접하는 오각형 ABCDE에서 $\angle A=96°$, $\angle D=112°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

12 문제 해결

오른쪽 그림과 같이 원 O의 두 현 BA와 CD의 연장선의 교점을 E, 두 현 AD와 BC의 연장선의 교점을 F라고 하자. $\angle E=46°$, $\angle F=38°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

두 접선이 이루는 각의 크기

원주각의 성질을 이용하면 원에서 두 접선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.

1 오른쪽 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 A에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 B와 C라고 하자.

다음은 원 O 위의 한 점 D에 대하여 $\angle BDC=62°$일 때, 점 A에서 원 O에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기를 두 가지 방법으로 구하는 과정이다. 풀이를 완성해 보자.

중심각과 원주각 사이의 관계를 이용하기

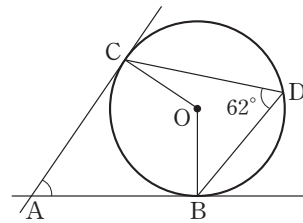
□ABOC의 내각의 크기의 합은 360°이다. 그런데

$\angle ABO=\angle ACO=$ □°

이고

$\angle BOC=2\angle BDC=$ □°

이므로,

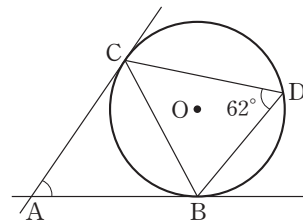
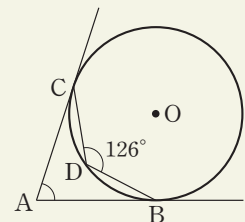
$\angle A=360°-(\angle ABO+\angle ACO+\angle BOC)=$ □°

원의 접선과 현이 이루는 각의 크기를 이용하기

오른쪽 그림에서

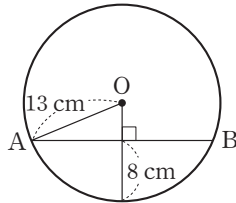
$\angle ABC=\angle BDC=$ □°

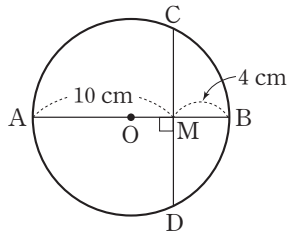
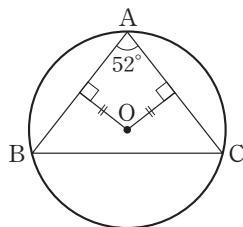
그런데 $\overline{AB}=$ □이므로 △ABC에서

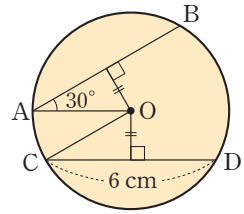
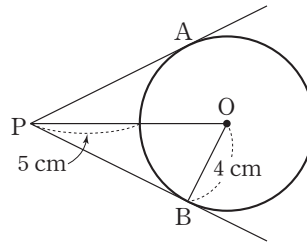
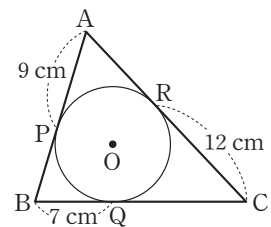
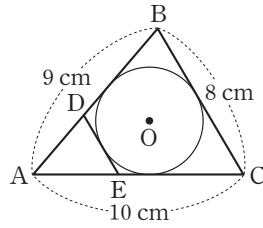
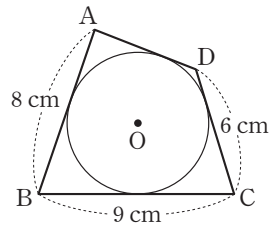
$\angle ACB=\angle ABC=$ □°

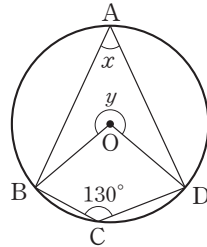
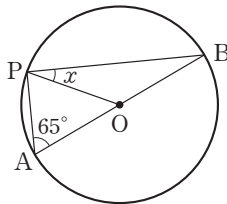
따라서 $\angle A=180°-2\times$ □°$=$ □°

2 오른쪽 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 A에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 B와 C라고 하자. 원 O 위의 한 점 D에 대하여 $\angle BDC=126°$일 때, 점 A에서 원 O에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기를 구해 보자.

단원을 마무리하는 문제

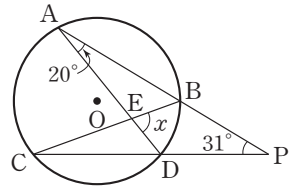
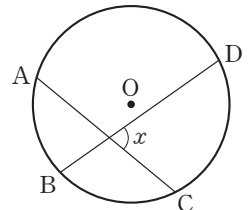
01 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$의 길이는?

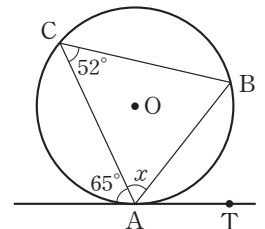
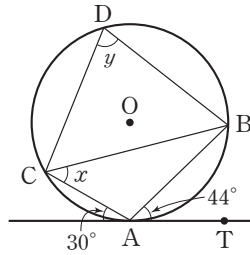
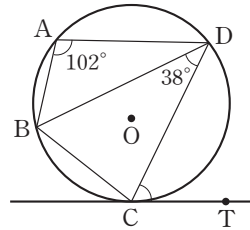
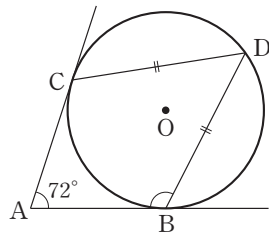
① 18 cm　② 20 cm
③ 22 cm　④ 24 cm
⑤ 26 cm

02 오른쪽 그림과 같이 원 O의 두 현 AB와 CD가 수직으로 만난다. $\overline{AM}=10$ cm, $\overline{MB}=4$ cm일 때, $\overline{CD}$의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ cm　② $4\sqrt{5}$ cm　③ $8\sqrt{5}$ cm
④ $2\sqrt{10}$ cm　⑤ $4\sqrt{10}$ cm

03 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB와 AC에 이르는 거리가 같다. $\angle A=52°$일 때, $\angle B$의 크기를 구하시오.

04 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB와 CD에 이르는 거리가 같을 때, 원 O의 넓이는?

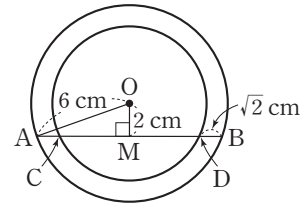
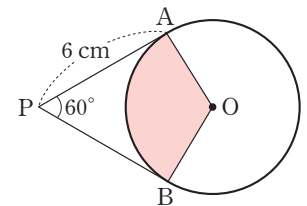
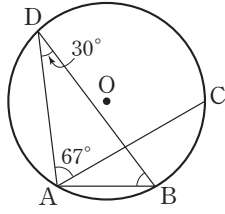
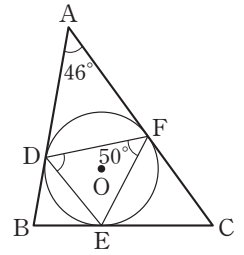
① 6π cm²　② 9π cm²　③ 12π cm²
④ 15π cm²　⑤ 18π cm²

05 다음 그림에서 두 점 A와 B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때, $\overline{PA}$의 길이를 구하시오.

06 오른쪽 그림에서 원 O는 △ABC의 내접원이고 세 점 P, Q, R는 접점일 때, △ABC의 둘레의 길이를 구하시오.

07 오른쪽 그림에서 원 O는 △ABC의 내접원이고 $\overline{DE}$가 원 O에 접할 때, △ADE의 둘레의 길이를 구하시오.

08 오른쪽 그림에서 □ABCD가 원 O에 외접할 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하시오.

09 오른쪽 그림에서 $\angle x+\angle y$의 값은?

① 300° ② 310°
③ 320° ④ 330°
⑤ 340°

10 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$가 원 O의 지름일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

11 오른쪽 그림과 같이 원 O의 두 현 AD와 CB의 교점을 E라 하고, 두 현 AB와 CD의 연장선의 교점을 P라고 하자. $\angle BAD=20°$, $\angle BPD=31°$일 때, $\angle x$의 크기는?

① 63° ② 65° ③ 67°
④ 69° ⑤ 71°

12 오른쪽 그림에서 $\overset{\frown}{AB}$와 $\overset{\frown}{CD}$의 길이는 각각 원 O의 둘레의 길이의 $\frac{1}{6}$과 $\frac{1}{4}$이다. $\angle x$의 크기를 구하시오.

13 오른쪽 그림에서 직선 AT가 원 O의 접선이고 점 A가 접점일 때, $\angle x$의 크기는?

① 61° ② 62°
③ 63° ④ 64°
⑤ 65°

14 오른쪽 그림에서 직선 AT는 원 O의 접선이고 점 A는 접점일 때, $\angle x+\angle y$의 값을 구하시오.

15 오른쪽 그림에서 직선 CT는 원 O의 접선이고 점 C는 접점일 때, $\angle$DCT의 크기를 구하시오.

16 오른쪽 그림에서 두 점 B와 C는 점 A에서 원 O에 그은 두 접선의 접점이다. 원 O 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=\overline{CD}$일 때, $\angle$ABD의 크기는?

① 116° ② 117° ③ 118°
④ 119° ⑤ 120°

[17~20] 서술형 풀이 과정과 답을 써 보자.

17 오른쪽 그림과 같이 중심이 같고 반지름의 길이가 서로 다른 두 원에서 $\overline{AB}\perp\overline{OM}$, $\overline{OA}=6$ cm, $\overline{OM}=2$ cm, $\overline{DB}=\sqrt{2}$ cm일 때, $\overline{OD}$의 길이를 구하시오.

18 오른쪽 그림에서 두 점 A와 B는 점 P에서 원 O에 그은 두 접선의 접점일 때, 부채꼴 OAB의 넓이를 구하시오.

19 오른쪽 그림에서 $\widehat{AB}=\widehat{BC}$일 때, $\angle ABD$의 크기를 구하시오.

20 오른쪽 그림에서 원 O는 $\triangle ABC$의 내접원인 동시에 $\triangle DEF$의 외접원이다. 세 점 D, E, F는 접점이고 $\angle A=46°$, $\angle DFE=50°$일 때, $\angle EDF$의 크기를 구하시오.

자기 평가 정답을 맞힌 문항에 ○표를 하고 결과를 점검한 다음, 이 단원의 학습 목표를 얼마나 성취했는지 스스로 평가하고, 학습 보충 계획을 세워 보자.

문항 번호	학습 목표	성취도
01 02 03 04 17	원의 현에 대한 성질을 이해하였는가?	☺ ㅣ 😐 ㅣ ☹
05 06 07 08 18	원의 접선에 대한 성질을 이해하였는가?	☺ ㅣ 😐 ㅣ ☹
09 10 11 12 19	원주각의 성질을 이해하였는가?	☺ ㅣ 😐 ㅣ ☹
13 14 15 16 20	원의 접선과 현이 이루는 각의 성질을 이해하였는가?	☺ ㅣ 😐 ㅣ ☹

0개~11개 개념 학습이 필요해요! → 12개~14개 부족한 부분을 검토해 봅시다! → 15개~17개 실수를 줄여 봅시다! → 18개~20개 훌륭합니다!

● 학습 보충 계획: ....

공학 기술로 만들어 낸 원

현실에서 우리가 원하는 만큼 크고 완벽한 원을 만드는 것은 불가능하겠지만, 지금은 우수한 공학 기술로 매우 큰 원형 구조물을 만들어 낼 수 있다.

여기서는 우리나라에서 찾아볼 수 있는 큰 원형 구조물을 살펴보기로 한다.

1 여수세계박람회장의 디오(The O)

'디오'는 2012년에 여수세계박람회장 앞바다의 방파제를 육지와 연결해 만든 해양 문화 공간 '빅오(Big O)'에 설치되어 있는 원형 구조물로 지름의 길이가 35 m이다.

디오는 원 둘레에 설치된 24개의 분사구에서 뿜어내는 물 표면이 스크린 역할을 하며, 이 위에 화려한 영상을 비출 각종 멀티미디어 장비들로 구성되어 있다.

(출처: 『뉴스투데이』, 2012년 5월 3일)

2 춘천시 춘천대교 주탑

춘천시와 중도를 연결하는 966 m 길이의 사장교인 춘천대교는 2017년 말에 준공되었는데, 우리나라에서는 처음으로 주탑을 지름의 길이가 45 m인 원형으로 만들어서 새로운 공법과 특별한 조형미 때문에 관심을 끌고 있다.

특히, 주탑을 가로지르는 다리의 상판에서 원에 그어진 현의 구조를 찾아볼 수 있다.

(출처: 『연합뉴스』, 2017년 11월 13일)

3 서울시 아쿠아 아트(Aqua Art) 육교

서울 예술의 전당 근처에 있는 이 육교의 입구에는 지름의 길이가 24 m인 원형 구조물이 비스듬히 세워져 있다. 이 원형 구조물은 유리로 만들어져 있으며 그 위를 물이 흐르고 있는 예술적 조형물이어서 '아쿠아 아트'라는 이름으로 부른다.

특히, 원형 구조물을 가로지르는 여러 개의 기둥과 선들이 원에서 현의 구조를 잘 보여 주고 있으며, 도로 표면은 마치 원형 구조물의 접선처럼 보인다.

(출처: 『동아일보』, 2013년 3월 27일)

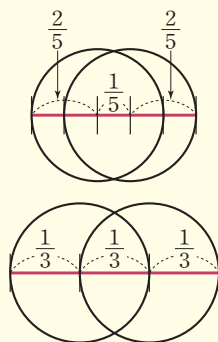
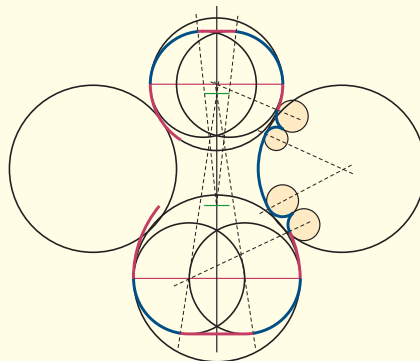
바이올린의 몸통은 어떻게 디자인하나요?

현악기 제작가는 바이올린이나 기타와 같은 현악기를 만드는 일을 합니다. 현악기를 제작하기 위해서는 목공 기술뿐만 아니라 음악사, 음향 물리학, 미술 등의 다양한 분야에 대한 전문 지식이 필요합니다. 또한 좋은 악기를 만들기 위해서는 오랫동안 연구자의 자세로 꾸준히 제작 경험을 쌓아 나가야 합니다.

요즘 사용하는 형태의 바이올린은 16세기 초 이탈리아의 북쪽 지방에서 처음 만들기 시작했다고 합니다.

기타에 비해서 바이올린의 몸통은 다소 복잡한 여러 가지 곡선으로 이루어져 있는데, 초기의 바이올린 제작가는 몸통을 어떤 방법으로 디자인했을까요?

바이올린의 몸통을 디자인할 때 다양한 크기의 원에 여러 개의 현과 접선을 그려서 필요한 곡선을 만들어 낼 수 있습니다.

몸통의 윗부분과 아랫부분은 크기가 같은 원 두 개를 [그림 1]과 같은 비례로 각각 그려서 정하고, [그림 2]와 같이 몇 가지 접선을 이용하여 몸통의 길이를 정합니다. 또한 다양한 크기의 원을 작도하여 몸통의 옆구리 부분을 완성하게 됩니다.

[그림 1] [그림 2]

바이올린의 목 부분 모양을 디자인할 때도 몸통과 마찬가지로 다양한 크기의 원을 이용하여 곡선을 만들어 냅니다. 이와 같이 원의 성질은 현악기를 디자인하는 데 매우 중요하게 쓰이는 도구입니다.

(출처: Newsquest, 『The Strad』 / 『The Strings』, 2017년 9월 13일)